LOGIK UND MENGENLEHRE

ÜBUNGSBLATT 3

1. Man finde, alle Äquivalenzrelationen die auf der Menge $A = \{a, b, c\}$ definieren lassen.

2. Man finde die Fehler aus dem folgenden "Beweis" für die Aussage: Eine homogene binäre Relation, die transitiv und symmetrisch ist, ist auch reflexiv, d.h. sie eine Äquivalenzrelation ist. Danach, ergänze man die Voraussetzung, so dass der gegebenen Argument wirchlich wirkt.

"Beweis". Man betrachte eine Relation $(A, A, \sim)$, die transitiv und symmetrich ist. Für $x \in A$, sei $y \in A$, so dass $x \sim y$. Aus der Symmetrie $y \sim x$ und ferner aus der Transitivität $x \sim x$. Also ist $\sim$ reflexiv auch.

3. Man zeige, dass die folgende Relationen Äquivalenzrelationen sind, und man bestimme jeweils die Faktormengen:

a) $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \sim)$ wobei $x \sim y$ g.d.w. $|x| = |y|$, für alle $x, y \in \mathbb{C}$.

b) $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \sim)$ wobei $x \sim y$ g.d.w. $x = y = 0$ oder $x \neq 0, y \neq 0, \arg x = \arg y$, für alle $x, y \in \mathbb{C}$.

(Hier by $|x|$ und $\arg x$ bezeichnen wir der Moduln, bzw. der Argument der komplexe Zahl x.)

4. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Man nennt *equivalent modulo* n, zwei ganze Zahlen x und y, so dass $n|(x - y)$, und man schreibt $x \equiv_n y$. Hier $n|m$ (d.h. n teilt m) g.d.w. $p \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $m = np$.

a) Man zeige, dass $\equiv_n$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

b) Man bestimme, die Faktormenge $\mathbb{Z}/\equiv_n$.

c) Man bezeichne mit $\mathbb{Z}_n$ die Faktormenge $\mathbb{Z}/\equiv_n$ und mit $\widehat{x}$ die Nebenklasse von $x \in \mathbb{Z}$ bezüglich $\equiv_n$. Man zeige dass die Operationen $+ : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $(\widehat{x}, \widehat{y}) \mapsto \widehat{x + y}$ und $\cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $(\widehat{x}, \widehat{y}) \mapsto \widehat{xy}$ wohl definiert sind.

Man errinnert, dass eine Operation auf einer Menge A ist bloßeine Abbildung $A \times A \to A$.

5. Man betrachte die homogene binäre Relation $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \sim)$ gegeben durch $(m, n) \sim (m', n')$ g.d.w. $mn' = m'n$ für alle $(m, n), (m, n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

a) Man zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ ist.

b) Man bestimme, die Faktormenge $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$.

c) Man bezeichne mit $\mathbb{Q}$ die Faktormenge $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$ und mit $\frac{m}{n}$ die Nebenklasse von $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ bezüglich $\sim$. Man zeige dass die

Operationen $+, \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn'+m'n}{nn'}$ und $\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = \frac{mm'}{nn'}$ wohl definiert sind.

d) Man zeige, dass die Operation $\star : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $\frac{m}{n} \star \frac{m'}{n'} = \frac{m+m'}{n+n'}$ nicht wohl definiert ist.

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien

E-mail address, George Ciprian Modoi: `cmodoi@math.ubbcluj.ro`